

Funciones y gráficas (3)

3. Funciones trigonométricas

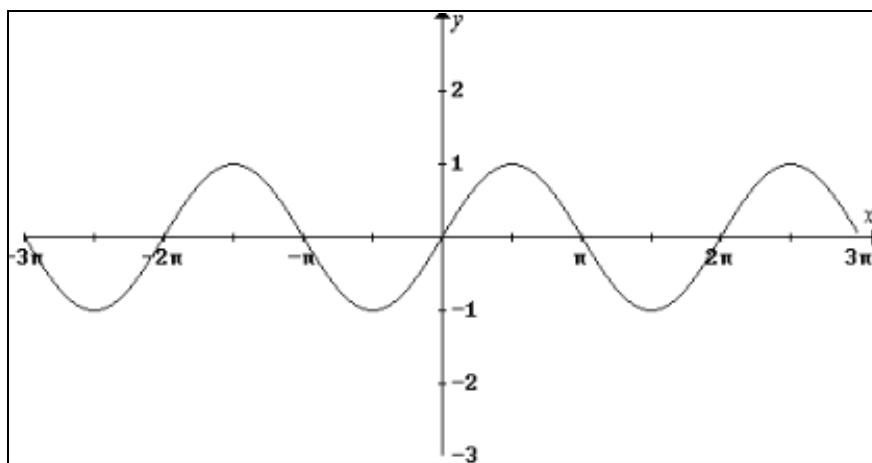
Las funciones trigonométricas son funciones muy utilizadas en las ciencias naturales para analizar fenómenos periódicos tales como: movimiento ondulatorio, corriente eléctrica alterna, cuerdas vibrantes, oscilación de péndulos, ciclos comerciales, movimiento periódico de los planetas, ciclos biológicos, etc. En aplicaciones de las funciones trigonométricas relacionadas con fenómenos que se repiten periódicamente, se requiere que sus dominios sean conjuntos de números reales. Para la obtención de valores de las funciones trigonométricas de números reales con una calculadora por ejemplo, se debe usar el modo radián.

3.1. Función seno

La función *seno* es la función definida por: $f(x) = \text{sen } x$.

Características de la función seno

1. Dominio: \mathbb{R}
Recorrido: $[-1, 1]$
2. El **período** de la función seno es 2π .
3. La función $y = \text{sen } x$ es **impar**, ya que $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, para todo x en \mathbb{R} .
4. La gráfica de $y = \text{sen } x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = n\pi$. para todo número entero n .
5. El valor máximo de $\text{sen } x$ es 1, y el mínimo valor es -1. La **amplitud** de la función $y = \text{sen } x$ es 1.



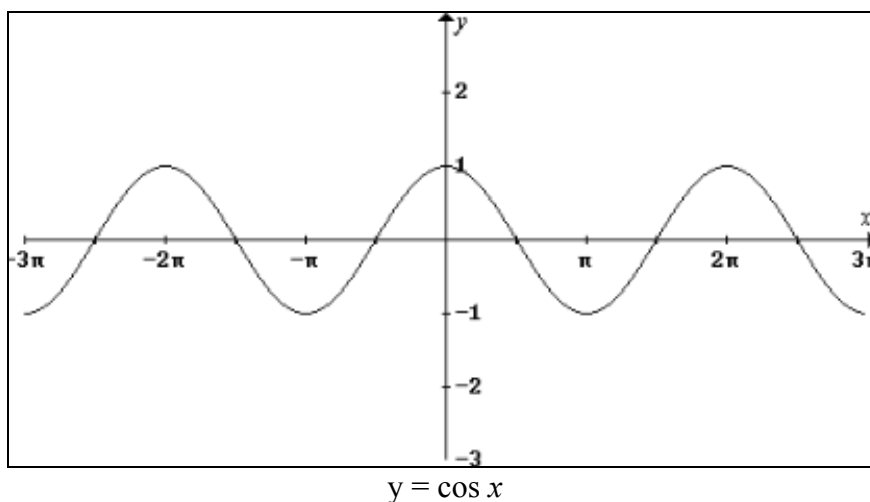
$y = \text{sen } x$

3.2. Función coseno

La función *coseno* es la función definida por: $f(x) = \cos x$.

Características de la función *coseno*

1. Dominio: \mathbb{R}
Recorrido: $[-1, 1]$
2. Es una función periódica, y su **período** es 2π .
3. La función $y = \cos x$ es **par**, ya que $\cos(-x) = \cos x$, para todo x en \mathbb{R} .
4. La gráfica de $y = \cos x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, para todo número entero n .
5. El valor máximo de $\cos x$ es 1, y el valor mínimo valor es -1. La **amplitud** de la función $y = \cos x$ es 1.

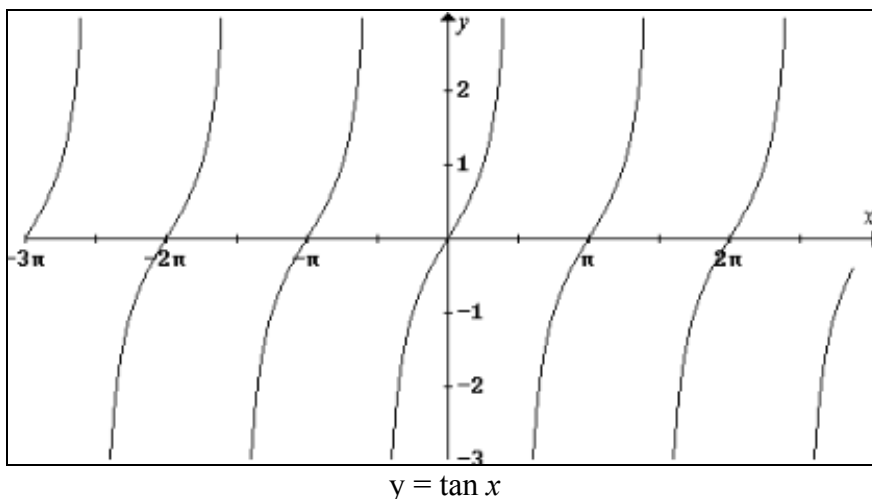


3.3. Función tangente

La función *tangente* es la función definida por: $f(x) = \tan x$.

Características de la función tangente

1. Dominio: $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi / n \in \mathbb{Z} \right\}$
Recorrido: \mathbb{R}
2. La función tangente es una función periódica, y su **período** es π .
3. La función $y = \tan x$ es una función impar, ya que $\tan(-x) = -\tan x$.
4. La gráfica de $y = \tan x$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son: $x = n\pi$, para todo número entero n .

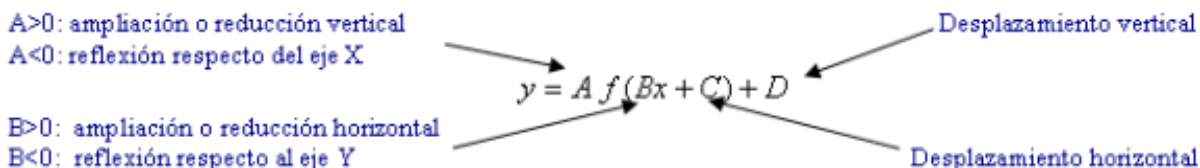


Las otras tres funciones trigonométricas: cotangente, secante y cosecante son también funciones periódicas.

Las funciones trigonométricas fueron sistematizadas por Newton y Leibniz, quienes habían dado expansiones en forma de serie para las mismas. Pero fue Euler quien dio el tratamiento completo y sistemático a las funciones trigonométricas. La periodicidad de estas funciones y la introducción de la medida de los ángulos por radianes, fue realizada por Euler en su *Introductio in Analysis Infinitorum* en 1748.

3.4. Transformaciones de gráficas de funciones trigonométricas

Las reglas para desplazar, dilatar, contraer, reflejar la gráfica de una función se pueden aplicar a las funciones trigonométricas, recordadas en el siguiente diagrama:



Funciones sinusoidales

Son funciones relacionadas con las funciones seno y coseno:

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) + D, \quad y = A \operatorname{cos}(Bx + C) + D$$

o una combinación de éstas.

La periodicidad de las funciones seno y coseno desempeña un papel importante en la obtención de las gráficas de estas funciones.

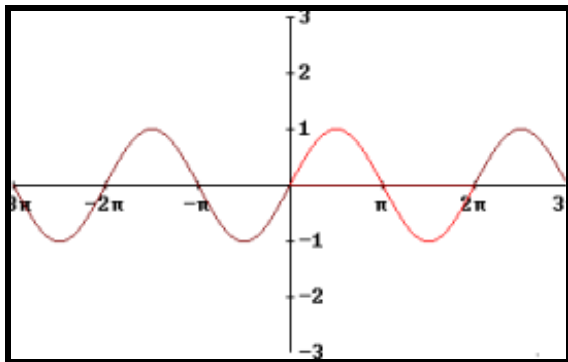
Características de estas funciones

Las gráficas de las funciones $y = A \operatorname{sen}(Bx + C) + D$ e $y = A \operatorname{cos}(Bx + C) + D$, considerando $B > 0$, se pueden obtener a partir de las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen}x$, e $y = \operatorname{cos}x$, cuyas características se señalan a continuación:

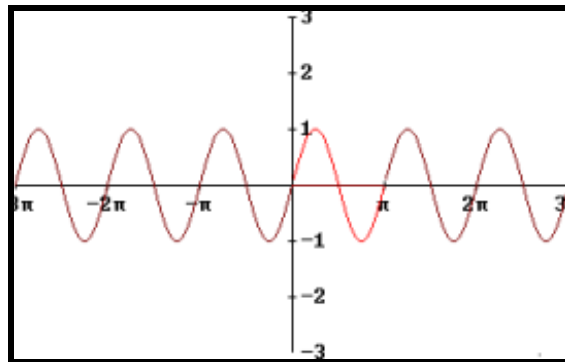
- **Amplitud:** $|A|$, que es el **promedio de la diferencia** entre los valores máximo y mínimo.
- **Período:** $\frac{2\pi}{B}$.
- **Desfase:** $-\frac{C}{B}$, desplazamiento horizontal de $-\frac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo, de la gráfica de $y = A f(Bx)$.
- **Desplazamiento vertical:** traslación vertical en D unidades de la gráfica de $y = A f(Bx + C)$.

Ejemplo 1. Gráfica de la función $y = -3\sin(2x - \pi/3)$.

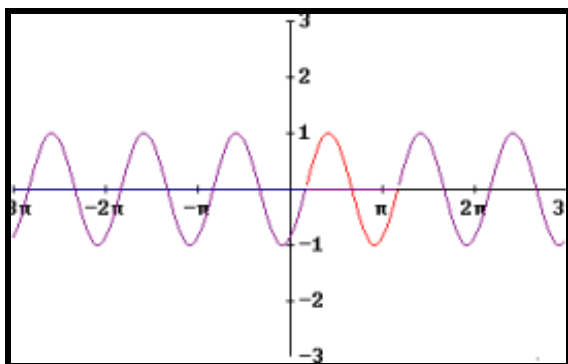
$$\text{Amplitud} = |-3| = 3, \text{ Período} = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ Desfase} = \frac{\pi}{6}$$



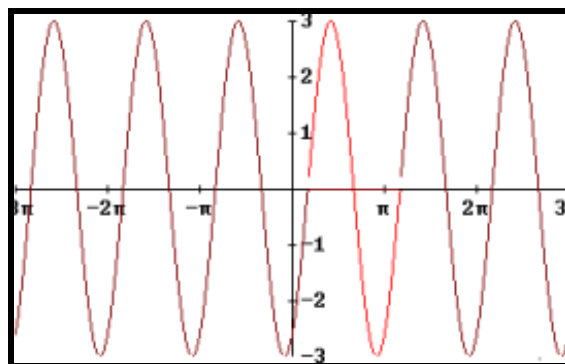
(1) $y = \text{sen}(x)$



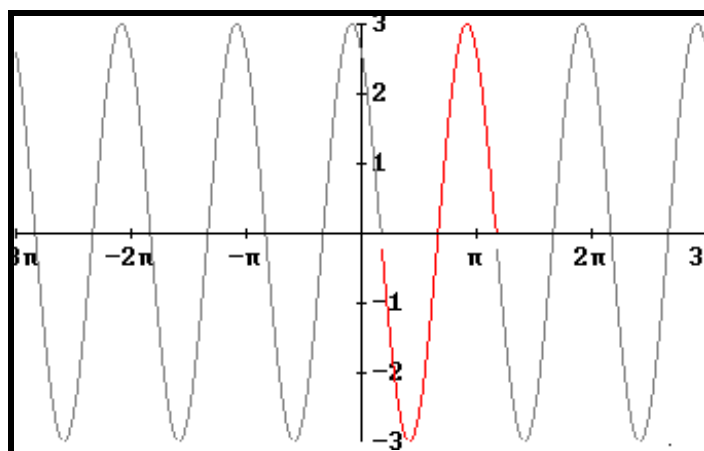
(2) $y = \text{sen}(2x)$



(3) $y = \text{sen}(2x - \pi/3)$



(4) $y = 3\text{sen}(2x - \pi/3)$

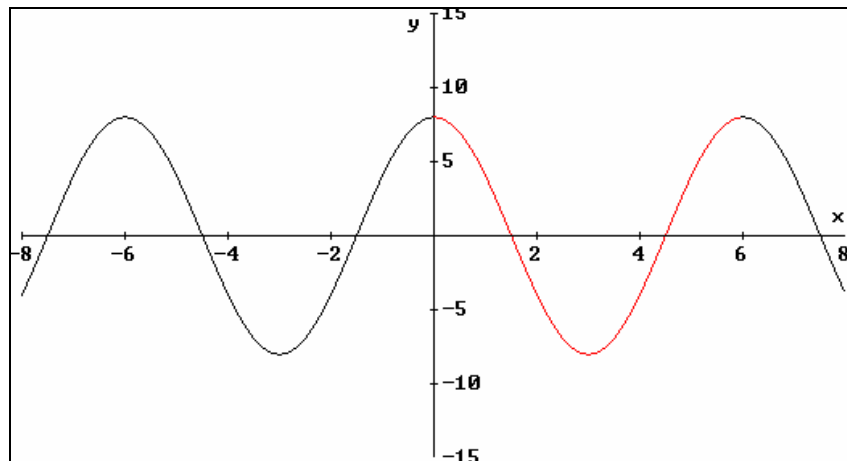


(5) $y = -3\text{sen}(2x - \pi/3)$

Ejemplo 2. Movimiento armónico simple.

Un cuerpo está vibrando verticalmente de acuerdo con la ecuación $f(t)=8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$, donde $f(t)$ centímetros es la distancia dirigida del cuerpo desde su posición central (el origen) a los t segundos, considerando como sentido positivo hacia arriba.

- Como la **amplitud** es 8, el máximo desplazamiento es 8cm.
- El **período** P es $\frac{2\pi}{\pi/3}$, es decir $P=6$. Por lo tanto, se requieren 6 segundos para una vibración completa del cuerpo.
- Inicialmente, el cuerpo se encuentra 8 cm por arriba del origen, la posición central. En el primer $\frac{1}{2}$ segundo el cuerpo baja 1.1 cm, es decir, se encuentra situado a 6.9cm arriba del origen, etc.
- La gráfica de la función $y=f(t)$ se muestra en la siguiente figura:

**Ejemplo 3.** Gráfica de la función $y = 2\cos(3x + \pi) - 1$.

Amplitud = 2, **Período** = $\frac{2\pi}{3}$, **Desfase** = $-\frac{\pi}{3}$, **Desplazamiento vertical** = -1

